"УТВЕРЖДАЮ"
Проректор
МГУ имени М.В.Ломоносова,

профессор ____________

А.А.Федянин
"__" ноября 2016 г.

О Т З Ы В

ведущей организации – механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова
на диссертационную работу Ситника Сергея Михайловича
"Применение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи
и их обобщений в теории дифференциальных уравнений
с особенностями в коэффициентах",
представленную к защите на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 –
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Работа посвящена разделу дифференциальных уравнений, изучающему операторы преобразования – операторы (обычно интегральные или интегродифференциальные), устанавливающие эквивалентность двух дифференциальных уравнений и позволяющие выражать решения (или какие-то их свойства) одних через решения других. Соответствующая теория для случая, когда связываемые дифференциальные операторы регулярны, достаточно хорошо разработана и изложена в общеизвестных публикациях, в том числе монографического характера.

Что же касается случая, когда один или оба оператора сингулярны (модельным примером являются операторы Бесселя), то тут известные результаты, несмотря на многочисленность, носят в основном изолированный характер и получены нередко в контексте каких-то других задач и проблем. Наиболее ярким, но в то же время и порождающим всё это направление исследований примером, здесь является связь, устанавливаемая между оператором Бесселя $B_\nu = \partial_x^2 + \frac{2\nu+1}{x}\partial_x$ и оператором второй производной ∂_x^2, выражаемая операторами преобразования Сонина и Пуассона. Однако разнообразные обобщения этого факта имели до сих пор статус неких феноменов, почему-то возникающих в связи с теми или иными задачами.

Проблема, поставленная автором, состоит в том, чтобы в совокупности таких результатов усмотреть общий, существенный конструкт, представить этот конструкт в форме, позволяющей все эти результаты свести воедино, как реализации общей теоретической системы и, более того, существенно расширить круг этих результатов, определив уже принципиальную степень общности, которой можно при этом достичь.

Центральная идея, на которую опирался автор, – рассмотрение в качестве базового класса преобразований операторов Бушмана-Эрдейи. Это операторы, ядра которых выражаются через функции Лежандра, они обладают (как установлено в диссертации) тем свойством, что позволяют связать между собой два различных оператора Бесселя и включают в себя, как частные случаи, не только операторы Сонина и Пуассона, но и операторы Римана-Лиувилля дробного интегрирования, и ряд других.

Эффективность выбора такого класса операторов проявила себя в двух аспектах. С одной стороны, этот класс операторов допускает детальное исследование с получением достаточно явных представлений, позволяющих выводить точные оценки (что является существенным в теории операторов преобразования). С другой стороны, полученная автором диссертации факторизация этого оператора через преобразования Фурье и Фурье-Бесселя позволяет из этого разложения строить новые введением в него дополнительного множителя – мультипликатора в образах Фурье, что создаёт чрезвычайно большой ресурс для расширения класса операторов.

Таким образом, проведённое исследование, помимо актуальности, которая автором предельно полно обоснована во введении (следует отметить, что соискатель является автором целого ряда систематических обзоров по теме диссертации, и по своей эрудиции является ведущим специалистом в этой области), обладает ещё и нетривиальной идейно-методологической базой, без использования которой исследователь был бы обречён либо на производство частных примеров, либо на получение общих, но достаточно грубых результатов.

Таким образом, работа демонстрирует высокий уровень не только математической, но и общенаучной культуры автора, выражающейся в способности самостоятельно ставить и решать достаточно сложные и нетривиальные проблемы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка публикаций автора и списка литературы.

Введение представляет собой подробный и, наверное, близкий к исчерпывающему исторический обзор теории операторов преобразования, результатов, относящихся к разделу этой теории, касающегося преобразований сингулярных операторов, места в этом разделе операторов Сонина-Пуассона и Бушмана-Эрдейи, и практически весь "букет" приложений операторов Бушмана-Эрдейи к различным вопросам теории дифференциальных уравнений. В формальной части введения представлены цели, задачи, выносимые на защиту результаты, охарактеризована их новизна, теоретическая и практическая значимость, апробация и опубликованность. Завершается введение кратким обзором полученных в диссертации результатов по главам.

В первой главе представлен основной объект исследования и необходимые для его введения понятия и факты. Это оператор Бесселя и связанные с ним функциональные пространства Киприянова; основные интегральные преобразования (Фурье, Бесселя, Меллина и др.); операторы преобразования Сонина и Пуассона; операторы Бушмана-Эрдейи, функции Лежандра, входящие в ядра последних, гипергеометрических функции, включающие в себя функции Лежандра при определённых значениях параметров; функции Майера, Фокса и другие.

Вторая глава посвящена систематическому исследованию основных свойств операторов преобразования Бушмана-Эрдейи. Следует отметить, что автору за счёт введения в рассмотрение четырех базовых версий операторов удаётся в результате строить, за счёт их комбинирования, все операторы, которые могут претендовать на то, чтобы быть аналогами данных.

Результаты первого параграфа начинаются с разложения операторов Бушмана-Эрдейи произвольного порядка гладкости на оператор Римана-Лиувилля и оператор Бушмана-Эрдейи нулевого порядка. Обращение этих операторов позволяет автору в качестве приложения получить уточнение леммы Копсона об условиях разрешимости задачи Гурса для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Далее детально исследуются свойства операторов Бушмана-Эрдейи произвольного порядка. Устанавливается их область определения, диапазон параметров, при которых они задаются непосредственно (через интеграл), свойства симметрии по каждому из параметров, формулы сдвига по параметрам, связь с другими интегральными преобразованиями, взаимодействие с дифференцированием и продолжение посредством дифференцирования на все значения параметров, разложение операторов Бушмана-Эрдейи на операторы Римана-Лиувилля и мультипликаторы.

Специфический вид разложений, которые получаются для операторов Бушмана-Эрдейи, позволяет автору, применив преобразование Меллина, ассоциировать каждый из таких операторов с некоторым мультипликатором, явные формулы которого (для операторов нулевого порядка) позволяют вычислить нормы этих операторов; всё это представлено автором в теореме 2.7.1. Далее получены условия унитарности операторов типа Сонина и Пуассона, и появляется конструкция, позволяющая построить из одного оператора преобразования другой. Как показано в теореме 2.1.10, для этого достаточно домножить мультипликатор, соответствующий этому оператору, на периодическую функцию.

На основании последнего разложения автор переопределяет (то есть на самом деле вводит новые аналоги) операторы Сонина и Пуассона, получая для них различные интегральные представления.

Второй параграф посвящён изложению аналогичных вопросов для операторов, которые автор называет операторами Бушмана-Эрдейи второго рода, и которые строятся соответственно по функциям Лежандра второго рода.

Завершают главу три параграфа, в которых устанавливается связь исследуемых операторов с известными аналогами операторов Сонина и Пуассона и перечисляются приложения полученных результатов к обобщению леммы Копсона для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, к вопросам корректности постановок задачи Коши для сингулярных уравнений, к установлению связей между собой решений линейных и нелинейных уравнений, к установлению эквивалентности норм в весовых пространствах Соболева и в пространствах Киприянова. Основную роль при этом играет обращение исследуемых операторов и различных их модификаций, которому посвящён пятый параграф этой главы.

Третья глава содержит изложение, по-видимому, центрального результата, связанного с общей конструкцией операторов преобразования. Идея состоит в том, чтобы с каждым из двух связываемых операторов ассоциировать такое обобщённое преобразование Фурье, для которого образ соответствующего оператора оказался одним и тем же мультипликатором. Тогда оператор преобразования строится в виде суперпозиции двух – прямого и обратного – таких обобщённых преобразований Фурье, между которыми вставляется произвольная функция (мультипликаторный множитель). В такой конструкции автор строит и изучает операторы, которые он называет операторами Бушмана-Эрдейи третьего рода (наружные преобразования – Фурье и Фурье-Бесселя, а между ними – произвольный мультипликатор). В случае степенного мультипликатора автор получает явные формулы для ядер соответствующих интегральных операторов через гипергеометрические функции, которые, в конечном итоге, удаётся свести к функциям Лежандра.

Эта глава – наиболее объёмная и содержит нетривиальные аналитические вычисления, проведение которых представляет собой довольно тяжёлый труд. Следует отдать должное упорству, тщательности, методичности и изощрённости автора, который этот труд совершил. Завершается глава приложениями полученных результатов к решению интегродифференциальных уравнений соответствующих классов, а также к построению операторов преобразования для операторов Бесселя разных порядков и для многомерных операторов, построенных суммированием операторов Бесселя по разным переменным (B-эллиптические и B-параболические операторы).

Главы 4 и 5 посвящены приложениям полученных автором результатов в теории дифференциальных уравнений. В четвёртой главе изучаются условия, при которых оказывается справедливой гипотеза Е. М. Ландиса о том, что решения уравнения $\Delta u - q(x)u = 0$ с ограниченным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющие экспоненциальной оценке на бесконечности (с подходящим показателем), сводятся к тривиальному (В. З. Мешковым показано, что эта гипотеза не является верной в общем случае). В диссертации гипотеза Ландиса подтверждена для потенциалов, зависящих от одной переменной, а также для потенциалов, ограниченных не константой, а некоторой функцией (с соответствующей вариацией утверждения гипотезы). Там же строится интегральное уравнение для оператора преобразования, ядро которого оказывается функцией Римана сингулярного дифференциального уравнения; это уравнение автор находит в явном виде и получает оценки интересующего его ядра, позволяющие оценивать уже решения для задачи с потенциалом. Эффективность полученного результата автор демонстрирует на потенциале степенного типа с особенностью.

Наконец, пятая глава посвящена изложению решения, с помощью разработанной техники, ряда смежных задач: построению в явном интегральном виде дробных степеней оператора Бесселя, построению с их использованием аналогов разложения Тейлора (по степеням оператора Бесселя), и некоторых других.

Список литературы приведен с разделением на работы автора диссертации (151 название) и на работы других авторов (359 названий).

Таким образом, в диссертации представлено изобилие результатов, составляющих целостную теорию операторов Бушмана-Эрдейи. Все представленные результаты являются новыми, формулировки – точными, а доказательства – достаточно аргументированными. В целом работа демонстрирует высокую культуру автора и уровень, безусловно являющийся докторским.

Замечания:

1. Самое существенное – нумерация публикаций: наличие отдельно – пронумерованного списка публикаций автора диссертации, а отдельно – пронумерованного списка публикаций других авторов приводит к постоянным недоразумениям: по ссылке невозможно понять (если это не указано явно), относится она к работе диссертанта или к работе другого автора.

2. В объяснении схемы композиционного метода на стр. 125 использовано совершенно неудачное обозначение $F(A)$ вместо вполне естественного, особенно в контексте этой работы, обозначения F_A для обобщённого преобразования Фурье, ассоциированного (в том смысле, что для него образ оператора A оказывается мультипликатором) с оператором A.

3. Имеется некоторое количество смысловых нестыковок в тексте. Так, на стр. 41-42 присутствует некое суждение и теорема про свёртку Меллина, которое, по-видимому, должно быть в следующем параграфе. По крайней мере с предыдущим текстом этот никак не вяжется. На стр. 50 имеется только заголовок параграфа, а самого параграфа нет. На стр. 64 употребляется оборот "гладкость в пространствах типа L_2" без объяснений, что такое "пространства типа L_2". Есть шкала L_p, есть шкала соболевских пространств H^s, есть шкалы весовых гильбертовых пространств. На стр. 69 в формулировке теоремы 2.1.4 утверждается, что оператор "является оператором типа Сонина", хотя нигде выше не объяснялось, что такое "оператор типа Сонина".

4. Имеется определённое количество опечаток, список которых передан автору, исправление которых очевидно и поэтому перечисление их не заслуживает того, чтобы быть отражённым в отзыве ведущей организации.

Приведенные выше замечания, конечно, не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы С. М. Ситника как оригинального, достаточно сложного и систематического исследования. Основные результаты диссертации опубликованы (в том числе в журналах из "Перечня" ВАК) и апробированы на семинарах и конференциях.

Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Полученные автором результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М. В. Ломоносова, СПбГУ, РУДН, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Белорусском, Саратовском, Воронежском, Белгородском, Челябинском, Орловском государственных университетах, в Институте прикладной математики и автоматизации (Нальчик), в других научно-исследовательских центрах России.

Таким образом, в диссертации автором решена крупная научная проблема построения теории операторов Бушмана-Эрдейи и её приложений в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Рассматриваемая работа полностью удовлетворяет требованиям Положения ВАК РФ о порядке присуждения научным и научно-педагогическим работникам ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор С. М. Ситник заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук, доцентом, профессором кафедры дифференциальных уравнений А. В. Боровских.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова; протокол № 251 от "11" ноября 2016 г.

Доктор физико-математических наук,
доцент — А. В. Боровских

Заместитель заведующего кафедрой дифференциальных уравнений, профессор — А. С. Шамаев

Секретарь кафедры, кандидат
физико-математических наук, доцент — В. В. Быков

Подпись А. В. Боровских, А. С. Шамаева, В. В. Быкова заверяю Ткачёва Л. П. нач. отд. кадров.

Сведения о ведущей организации

Полное наименование: Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"
Сокращённое наименование: МГУ имени М. В. Ломоносова
Местонахождение: г. Москва, Ленинские горы, д. 1.
Почтовый адрес: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет.
Телефон: +7-495-939-12-44
Факс: +7-495-939-20-90
E-mail: mmmf@mech.math.msu.su
Адрес официального сайта: www.math.msu.ru